LK 12 **Mathematikklausur Nr.2** 10.12.07 Name

Hilfsmittel: Formelsammlung und nicht programmierbarer Taschenrechner.

Bearbeitungszeit: 120 Minuten

Bei allen Rechnungen ist möglichst ein Ergebnisterm, ansonsten ein auf drei Dezimalstellen gerundetes Ergebnis anzugeben.

1. Funktionsuntersuchung, Ableitung, Integration und Flächenberechnung

Gegeben ist die Funktionenschar f_t durch $f_t(x) = (x+t)e^{-x}$; $t \in \Re$

a) Untersuchen Sie f_t auf Schnittpunkte mit den Koordinatenachsen sowie auf Extrem- und Wendepunkte. Bestimmen Sie die Ortskurve der Wendepunkte und zeigen Sie damit, dass alle Wendepunkte oberhalb der x-Achse liegen.
(zur Kontrolle: $f_t''(x) = (x + t - 2)e^{-x}$) (14 BE)

b) Zeichnen Sie für t = 1 den Graphen von $f_t(x)$ im Bereich $-1 \leq x \leq 2$. Zeichnen Sie zusätzlich den Graphen der Funktion $h(x) = -xe^{-x}$, $x \in \Re$ in das vorhandene Achsenkreuz ein. (1 LE = 2 cm)
Berechnen Sie die Koordinaten des Schnittpunktes der beiden Kurven und prüfen Sie durch Rechnung, ob sich beide Kurven rechtwinklig schneiden. (20 BE)

c) Zeigen Sie: Die Funktion $F(x) = (-x-2)e^{-x}$ ist eine Stammfunktion von f_1, und f_1 ist eine Stammfunktion von h.
Die Graphen von f_1 und h sowie die Geraden $x = 0$ und $x = k$ mit $k > 0$ umschließen eine Fläche. Berechnen Sie deren Inhalt A(k).
Untersuchen Sie, ob A(k) größer als 3 werden kann. (10 BE)

2. Wachstumsfunktionen

Die Entwicklung der Weltbevölkerung während einer Wachstumsphase im letzten Jahrhundert soll durch zwei verschiedene Modellfunktionen beschrieben und verglichen werden.

2.1 Linearer Ansatz

a) Bestimmen Sie eine *lineare* Funktion g(x), mit der sich die Bevölkerungszahlen für die vierte Wachstumsphase berechnen lassen. Betrachten Sie dazu die gegeben Zahlen zu Beginn und am Ende der vierten Wachstumsphase von 1950 bis 1970. (6 BE)

b) Berechnen Sie den *prozentualen* Bevölkerungszuwachs gemäß g(x) im Jahr 1950. Bestimmen Sie außerdem das Jahr, in dem nach diesem Modell die Bevölkerungszahl auf 10 Mrd. ansteigen würde. (4 BE)

Jahr t	Bev. in Mrd. P(t)	Jahr t	Bev. in Mrd. P(t)
1650	0,545	1968	3,483
1750	0,791	1970	3,698
1800	0,978	1972	3,782
1850	1,262	1974	3,89
1900	1,55	1976	4,099
1910	1,686	1978	4,258
1920	1,811	1980	4,448
1930	2,07	1982	4,607
1940	2,295	1984	4,763
1950	2,516	1986	4,936
1955	2,752	1988	5,111
1960	3,019	1990	5,292
1965	3,336	1992	5,48
1966	3,356	1994	5,66

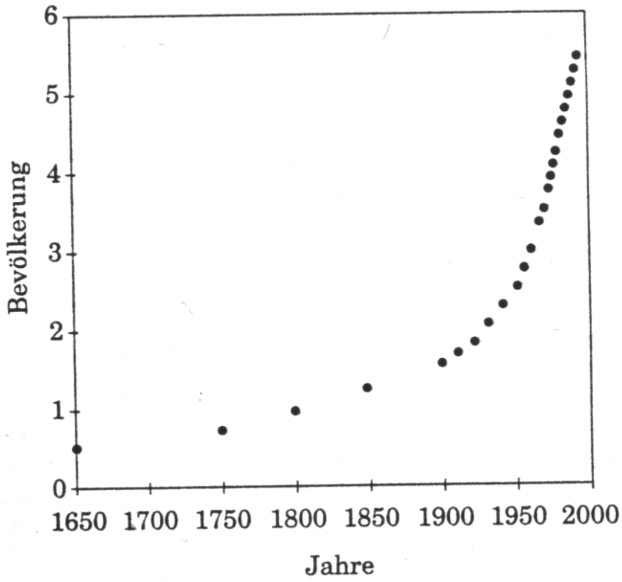

Tabelle und Graphik zeigen die Entwicklung der Weltbevölkerung (1650–1994).
Man unterscheidet verschiedene Wachstumsphasen:
1650–1750: sehr langsames Wachstum
1750–1900: langsam anschwellendes Wachstum
1900–1950: stark anschwellendes Wachstum
1950–1970: extrem starkes Wachstum
1970–1994: weiterhin starkes Wachstum

2.2 Exponentieller Ansatz

a) Bestimmen Sie für die vierte Phase eine Wachstumsfunktion f(x) mit Hilfe einer Exponentialfunktion. Überprüfen Sie Ihr Ergebnis für das Jahr 1970. (7 BE)

b) Berechnen Sie den <u>*prozentualen*</u> Bevölkerungszuwachs gemäß f(x) im Jahr 1950 und bestimmen Sie das Jahr, in dem nach diesem Modell die Bevölkerungszahl auf 10 Mrd. ansteigen würde. (5 BE)

2.3. Vergleich

a) Begründen Sie *allgemein und mit Hilfe der Tabelle*, welcher Ansatz realistischer ist. (9 BE)

b) Zeigen Sie allgemein: Die Differenz zweier Funktionen $g(x) = mx + n$ und $f(x) = a * q^x$ ist genau dort maximal, wo beide Funktionen die gleiche Steigung besitzen. (5 BE)

Viel Erfolg !